



Об одном варианте энергетического метода решения задачи устойчивости балок

Р.А. Каюмов¹, Л.Р. Хайруллин¹, Р.Ф. Гилязитдинов¹

¹Казанский государственный архитектурно-строительный университет
г. Казань, Российская Федерация

Аннотация: Задача устойчивости стержня на упругом основании с различными условиями закрепления, в том числе, с различными упругими опорами является актуальной как в машиностроении, так и в строительстве. Целью данной работы является разработка нового метода решения задачи устойчивости стержня, позволяющая улучшить оценку критической нагрузки при использовании энергетического метода. Для достижения этой цели необходимо представить энергетическую формулировку, отличающуюся от тех, которые имеются в литературе. При этом необходимо показать, что она позволяет в некоторых случаях получить решение, которое даёт меньшее значение критической нагрузки, чем другие подходы. Далее необходимо верифицировать предлагаемый подход на примерах, что и продемонстрировано на примере шарнирно опертой балки переменной толщины. Выявлено, что он даёт меньшее значение критической нагрузки по сравнению с тем, к которому приводит решение, использующее подход Тимошенко при вычислении работы сжимающей силы. Это позволяет более точно оценивать устойчивость стержней и колонн.

Ключевые слова: устойчивость стержня, энергетический подход, верхняя граница критической нагрузки, упругие опоры, упругое основание

Для цитирования: Каюмов Р.А., Хайруллин Л.Р., Гилязитдинов Р.Ф. Об одном варианте энергетического метода решения задачи устойчивости балок // Известия КГАСУ, 2024, № 2(68), с. 105-113, DOI: 10.48612/NewsKSUAE/68.9, EDN: IASXFJ

Another variant of using the energy method for solving the problem of beam stability

R.A. Kayumov¹, L.R. Khayrullin¹, R.F. Gilyazitdinov¹

¹Kazan State University of Architecture and Engineering
Kazan, Russian Federation

Abstract The problem of stability of a rod on an elastic base with various fastening conditions, including with various elastic supports, is relevant both in mechanical engineering and in construction. The purpose of this work is to develop a new method for solving the problem of rod stability, which allows improving the assessment of the critical load from above when using the energy method. To achieve this goal, it is necessary to present an energy formulation that differs from those available in the literature. At the same time, it must be shown that in some cases it allows to obtain a solution that gives a lower critical load value than other approaches. Further, it is necessary to verify the proposed approach using examples, which is demonstrated by the example of a pivotally supported beam of variable thickness. It is revealed that it gives a lower value of the critical load compared to that resulting from a solution using the Timoshenko approach in calculating the work of the compressive force. This allows a more accurate assessment of the stability of rods and columns.

Keywords: stability of the rod, energy approach, upper limit of the critical load, elastic supports, elastic base

For citation: Kayumov R.A., Khayrullin L.R., Gilyazetdinov R.F., On one variant of the energy method for solving the problem of beam stability // News KSUAE, 2024, № 2(68), p. 105-113, DOI: 10.48612/NewsKSUAE/68.9, EDN: IASXFJ

1. Введение

Задачи устойчивости стержня рассматривались многими учеными [1-2], в том числе в различных усложненных постановках (см., в частности, [3-5]). До сих пор задаче о потере устойчивости элементов конструкций посвящается немало работ (см. например, в [6-8]). Некоторые из них решаются в геометрически нелинейной постановке [9-11]. Имеются работы, в которых рассматриваются другие виды нагрузок и упругих тел [12-13]. В частности, задачи, в которых учитываются не стандартные ограничения на перемещения стержня, рассматривались в работах [14-16]. Задачи о потере устойчивости стержней с такого рода ограничениями (например, таковыми могут быть промежуточные упругие опоры, внецентренное нагружение), вытекающие из реальных технических проблем, рассмотрены в [17-19]. Немало работ посвящено задачам и о закритической деформации упругих элементов (см. обзоры, например, в [5,7,8]). Применяются много разных методов [20-22], различные модели материалов (см. обзоры в [23, 24], из которых изготовлены стержни (в частности, предлагаются методы, основанные на «модифицированных» функциях устойчивости Тимошенко, для анализа немалых перемещений и закритической работы стержней с полужесткими соединениями с учетом отклонения от вертикали, с учетом деформаций сдвига, продольных деформаций и упругого закрепления концов стержня).

Энергетический метод был предложен Тимошенко С.П. [1,2]. Однако он приводит к парадоксу, если в качестве энергии деформации использовать сумму работ изгибающих моментов для малых элементов (представленных в виде произведения сжимающей силы на ее плечо), умноженных на изменение угла наклона элемента балки (см. ссылки в [2] на работы Дроздова П.Ф. и Лейтеса С.Д.). В случае консольной балки это записывается в виде [1]:

$$M = P(f - w), \quad \Delta V = \int_0^L \frac{M^2 dz}{2EJ}$$

Здесь M - изгибающий момент ($\kappa H \cdot m$), f - прогиб свободного торца (m), w - прогиб на расстоянии z от заделки (m), L - длина балки (m), EJ - изгибная жесткость ($\kappa H \cdot m^2$), ΔV - энергия изгиба ($\kappa H \cdot m$), P - осевая сжимающая сила (κH). Для этого случая выясняется, что при $P < P_{кр}$ балка, якобы, неустойчива, а при $P > P_{кр}$ она, напротив, якобы, устойчива. Для того, чтобы исключить такого рода парадоксы, нужно для вычисления энергии деформации изгибающего момента использовать выражения следующего вида [2]:

$$M = EJ \cdot w'', \quad \Delta V = \frac{1}{2} \int_0^L EJ \cdot (w'')^2 \cdot dz$$

Здесь и далее штрихами обозначаются производные по осевой (продольной) координате z .

Работа внешней силы P представляется в виде [1-3]:

$$\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^L (w')^2 \cdot dz \quad (1)$$

Подход, предложенный Тимошенко С.П. и основанный на законе сохранения энергии для балок, можно сформулировать следующим образом: работа изгибающих моментов M равна работе внешних сил при любых виртуальных перемещениях. Он позволяет найти критическую силу из условия:

$$\Delta T = \Delta V$$

Как отмечается в [2], этот подход даёт завышенные значения для критической нагрузки.

Целью данной работы является разработка нового метода решения задачи устойчивости стержня, позволяющая улучшить оценку критической нагрузки при использовании энергетического метода. При этом приходится решать задачи о том, как можно записать закон сохранения энергии в новой формулировке, показать, что эта формулировка в частных случаях равносильна известной форме, предложенной Тимошенко, записать выражение для критической нагрузки в общем случае, привести примеры применения этой новой формулировки, показать ее преимущество при решении частных задач.

2. Материалы и методы

Для описания модели деформирования балки при продольном изгибе используются гипотезы Бернулли, при этом, как и в подходе Эйлера, пренебрегаются малые продольные деформации на уровне центра тяжести сечения по сравнению с изгибными. При получении разрешающих уравнений привлекается закон сохранения энергии. Аппроксимация закона деформирования использует условия непрерывности перемещений и их первых производных (углов наклона кривой, описывающей картину изгиба). При получении выражения для критической нагрузки предлагается использовать закон сохранения энергии, соотношение для которого отличается от известных на сегодня. Показано, что это соотношение совпадает с выражениями, предложенными Тимошенко только в тех случаях, когда сечения стержня могут быть описаны непрерывными функциями от продольной координаты.

3. Результаты и обсуждение

Приведем решение задачи устойчивости балки на основе закона сохранения энергии в новой постановке.

Поскольку при использовании энергетического подхода возможны различные формулировки задачи и они дают завышенные значения для критической нагрузки, то имеет смысл провести расчеты в разных постановках, а затем выбрать то решение, которое даёт меньшее значение критической нагрузки.

Ниже рассматривается формулировка энергетического подхода, отличающаяся от тех, которые были упомянуты выше. Продемонстрируем его на примере балки с двумя шарнирными опорами (рис.1). Для исключения неясностей приведём вывод этой формулировки. Рассмотрим малый элемент балки длины dz (рис.1). Для прогиба $w(z)$ выберем аппроксимацию функцию, например, в виде:

$$w = w(z) = B \cdot z(z - L_1) = B(z^2 - zL_1)$$

Поскольку при отыскании $P_{кр}$ амплитуда прогиба не имеет значения, то можно положить, что $B=1$, т.е. можно принять, что

$$w = z^2 - z \cdot L_1 \quad (2)$$

Тогда по закону Гука при изгибе в случае малых прогибов имеем соотношение:

$$M = EJw'' = EJ \cdot 2 \quad (3)$$

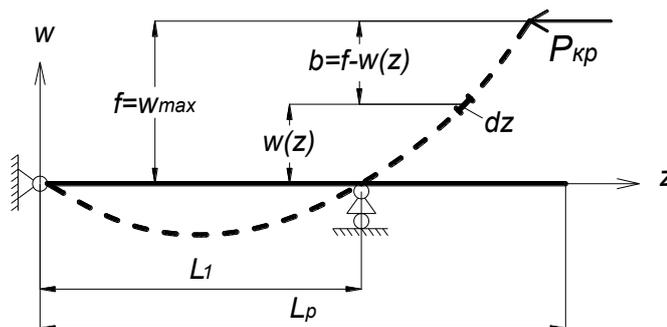


Рис.1 Картина потери устойчивости балки с двумя шарнирными опорами (иллюстрация авторов)

Fig.1 Picture of the loss of stability of a beam with two hinged supports (illustration by the authors)

Далее будем считать, что виртуальный прогиб задаётся уже после того, как произошел реальный прогиб. Тогда можно не учитывать коэффициент $\frac{1}{2}$, который входит в приведенные выше соотношения.

В качестве возможного (виртуального) вида прогиба δw выберем такую же функцию, которая пропорциональна реальному прогибу:

$$\delta w = w = z^2 - zL_1 \quad (4)$$

Работа, производимая изгибающими моментами M , будет равна:

$$\Delta V = \int_0^{L_p} EJ \cdot (w'')^2 \cdot dz L_p \quad (5)$$

С учетом аппроксимации прогиба (см. формулу (2)) получим:

$$\Delta V = \int_0^{L_p} EJ \cdot 2 \cdot 2 dz = 4EJ \cdot L_p \quad (6)$$

Далее отметим, что ΔT (энергию силы P) можно вычислять и другим способом, а не так, как приведено в соотношении (1). Согласно рис.1 сила $P_{кр}$ создает момент с плечом b в сечении с координатой z . Тогда:

$$M_{(от P_{кр})} = P_{кр} b = P_{кр} [w_{max} - w(z)] = P_{кр} [w(L_p) - w(z)] \quad (7)$$

Работа от изгиба этим моментом будет:

$$\Delta T_1 = \int_0^{L_p} M_{(от P_{кр})} w'' dz = \int_0^{L_p} P_{кр} [w(L_p) - w(z)] \cdot w'' dz$$

Далее нужно учесть, что сила $P_{кр}$ при жестком повороте балки около левой точки опоры производит работу:

$$\Delta T_2 = P_{кр} \cdot w'(0) \cdot w(L_p)$$

Окончательно работа $P_{кр}$ будет:

$$\Delta T = \int_0^{L_p} P_{кр} [w(L_p) - w(z)] \cdot w'' dz + P_{кр} w'(0) \cdot w(L_p) \quad (8)$$

Это соотношение можно получить и другим способом. Для этого нужно использовать формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \Delta T(\delta w) &= P_{кр} \int_0^{L_p} (w')^2 \cdot dz = P_{кр} \left(- \int_0^{L_p} w'' w \cdot dz + \int_0^{L_p} (w' w)' \cdot dz \right) = \\ &= P_{кр} \left(- \int_0^{L_p} w'' w \cdot dz + \int_0^{L_p} w'' w(L_p) \cdot dz + w'(0) \cdot w(L_p) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Использование соотношений (8) и (1) дают одинаковые результаты в том случае, когда функция w непрерывна вплоть до второй производной. Ниже будет приведен пример, когда применение (8) приводит к лучшим результатам по сравнению со случаем использования выражения (1).

Учитывая граничные условия на торцах балки в нашей частной задаче получим зависимость:

$$\Delta T = P_{кр} \int_0^{L_p} \left[(L_p^2 - L_p \cdot L_1) - (z^2 - z \cdot L_1) \right] 2 dz = \Delta T = P_{кр} L_p^2 \left(L_p \frac{4}{3} - L_p \right) \quad (10)$$

Запишем теперь закон сохранения энергии:

$$\Delta T = \Delta V \quad (11)$$

Подстановка сюда (6) и (9) дает:

$$P_{кр} = 4 \frac{EJ}{L_P(L_P \frac{4}{3} - L_1)} \quad (12)$$

Если положить $L_1 = L_P$, то получим для $P_{кр}$ значение, которое превышает величину, найденную по формуле Эйлера, примерно на 20%. Это вызвано тем, что была выбрана слишком простая аппроксимация для W в виде (2). Отметим, что при использовании подхода Тимошенко для вычисления ΔT по соотношению (1), получим точно такое же выражение для $P_{кр}$, что и в (12).

Если же при $L_1 = L_P$ принять известную функцию для прогиба в виде:

$$w = w_0 \sin \frac{\pi z}{L_1} \quad (13)$$

то найдем точное значение для $P_{кр}$.

Энергетический подход удобен в тех случаях, когда многопролетная балка может иметь разную или переменную толщину на разных участках, может быть изготовлена из разных материалов, может иметь множество различных закреплений (см., например, рис.2). Кроме того, кроме стандартных видов закреплений может иметь место упругая опора (например, в точке B) и упругое сопротивление повороту сечения (в точке D). Законы, которые связывают прогиб в этих точках с упругими характеристиками этих опор, представимы в виде:

$$M_D = c_D w'_D, \quad R_B = c_B w_B \quad (14)$$

Здесь c_D, c_B - жесткости пружин в точках D и B соответственно.

Дополнительно можно предположить, что балка находится на упругом основании, закон Винклера для которого имеет вид:

$$q = -k w \quad (15)$$

Здесь k - коэффициент постели, он может быть разным в разных точках основания, т.е. $k = k(z)$.

Рассмотрим далее случай, когда шарнирно опертая балка состоит из трех участков с длинами a_1, a_2, a_3 и моментами инерции J_1, J_2, J_3 . Примем аппроксимацию для W на первом и третьем участках в виде (2), т.е.

$$w_1 = z^2 - z \cdot L_P; \quad w_3 = z^2 - z \cdot L_P;$$

На втором участке примем ее в виде

$$w_2 = (c_4)^5 z^5 + (c_4)^4 z^4 + (c_3)^3 z^3 + (c_2)^2 z^2 + c_1 z + c_0$$

Коэффициенты выражаются через a_1, a_2, a_3 из условий непрерывности прогибов, их производных и изгибающих моментов на границах участков. В частном примере при $J_1 = J_3 = 0.36J_2$, приводимом ниже, принимались следующие их значения:

$$L_1 = 0.25L_P, \quad L_2 = 0.6L_P, \quad L_3 = 0.15L_P,$$

$$c_5 \approx 10^{-14} / L_P^3, \quad c_4 = -1.78 / L_P^2, \quad c_3 = 3.91 / L_P, \quad c_2 = -1.91, \quad c_1 = 0.169L_P, \quad c_0 = -0.08L_P^2$$

Тогда решение, полученное при использовании соотношения (1), предложенного Тимошенко, будет давать для $P_{кр}$ значение, которое будет выше, чем в случае, когда используется уравнение (8). А именно, при использовании (8) вытекает, что

$$P_{кр} = 8.63 \frac{EJ_2}{L_P^2} \quad (16)$$

Если же применить подход Тимошенко (т.е. формулу (1)), то получим

$$P_{кр} = 9.02 \frac{EJ_2}{L_p^2} \tag{17}$$

Далее нагрузку, которая приводит к потере устойчивости балки и определяется энергетическим методом, будем обозначать символом $P_{кин}$. Ниже также учтено, что при определении $P_{кин}$ значение амплитуды не имеет значения, т.е. принято, что $B=1$, как и в (1).

Отметим, что в большинстве случаев аппроксимацию прогиба легко записать. Например, для случая, изображенного на рис.2, учитывая, что амплитуда не имеет значения, ее можно представить в виде:

$$w = z^2(z - L_1)(z - L_4)^2 \tag{18}$$

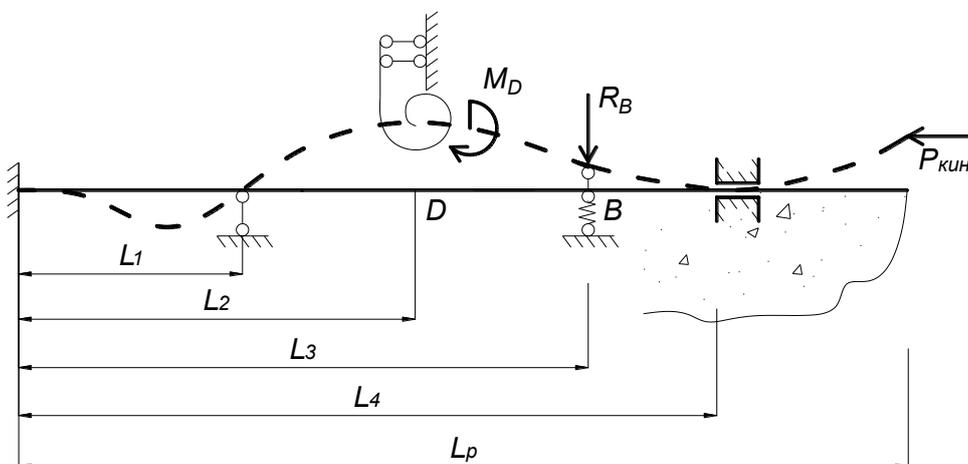


Рис.2 Картина потери устойчивости балки с различными видами опор (иллюстрация авторов)

Fig.2 The picture of the loss of stability of a beam with various types of supports (illustration by the authors)

Снова в качестве возможного (виртуального) вида прогиба δw можно выбрать аналогичную функцию вида:

$$\delta w = w = z^2(z - L_1)(z - L_4)^2 \tag{19}$$

Тогда из закона сохранения энергии получим следующую формулу для $P_{кр}$:

$$P_{кин} = \frac{\int_0^{L_p} EJ \cdot (w'')^2 dz + \int_0^{L_p} k \cdot (w)^2 dz + c_D (w'_D)^2 + c_B (w_B)^2}{\int_0^{L_p} [w(L_p) - w(z)] \cdot w'' dz} \tag{20}$$

Кроме того, в общем случае EJ и k могут быть разными на разных участках или сечениях ввиду, например, разных поперечных размеров балки.

Предложенный подход также дает верхнюю границу для критической нагрузки, т.е. формула (20) тоже дает для $P_{кр}$ завышенные значения по сравнению с ее величиной, определенной бифуркационным методом. Однако преимущество предложенного подхода состоит в том, что он гораздо проще для приближенных расчетов и может быть применен без использования сложного математического аппарата, поскольку даже в более сложных задачах, когда условия закрепления, а значит и w , и δw имеют более сложный вид, можно интегрирование проводить приближённо, например, численно методом Симпсона. Использование же дифференциальных уравнений нейтрального равновесия требует удовлетворения не только самих этих уравнений, статических и кинематических условий на торцах балки, но также условий стыковок решений на границах участков. Решение систем дифференциальных уравнений как правило вызывает немалые трудности. А энергетический подход сразу дает выражение для $P_{кр}$ (например, в виде (20) в частном случае, изображенном на рис.2).

При желании уточнить решение можно использовать, как обычно, разложение функции прогиба в ряд по некоторым функциям, удовлетворяющим условиям закрепления. Тогда, записывая (11) при различных виртуальных прогибах, получим однородную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов этого ряда. Условие существования ненулевого решения этой системы позволяет получить уравнение относительно критической нагрузки и выбрать из его решений её наименьшее значение.

4. Заключение

Предложен энергетический подход к решению различных задач устойчивости упругих стержней (в том числе стержней ступенчатого сечения на упругом основании, с различными условиями закрепления, с различными упругими опорами), отличающийся от тех, которые имеются в литературе. Он позволяет в ряде случаев получить решение, которое даёт меньшее значение критической нагрузки, чем другие энергетические методы. Решение, использующее эту формулировку, продемонстрировано на примере балки с двумя опорами. Выявлено, что оно даёт меньшее значение критической нагрузки по сравнению с тем, к которому приводит решение, использующее подход Тимошенко при вычислении работы сжимающей силы. Предложенный подход (как и другие энергетические формулировки), проще для приближенных расчётов и может быть применён без использования сложного математического аппарата.

Список литературы / References

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. - М.: Наука, 1971. - 808 с. [Timoshenko S.P. Stability of rods, plates and shells. - M.: Science, 1971. - 808 p.]
2. Пановко Я.Г. Губанова Н.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы. - М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы. - 1979. - 384 с. [Panovko Ya.G. Gubanov N.I. Stability and oscillations of elastic systems: Modern concepts, errors and paradoxes. - M.: Science Main editorial office of the physical and mathematical literature. - 1979. - 384 p.]
3. Benmokrane B. Creep-rupture limit for GFRP bars subjected to sustained loads /B. Benmokrane, V.L. Brown, K. Mohamed, A. Nanni, M. Rossini, C. Shield // Journal of composites for construction. 2019. Vol. 23. Issue 6. P. 06019001. DOI: 10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0000971
4. D'Antino T. Long-term behavior of GFRP reinforcing bars / T. D'Antino, M.A. Pisani // Composite Structures 2019. Vol. 227. P. 111283. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111283
5. Каюмов Р.А. Закритическое поведение сжатых стержней в упругой среде // Известия РАН. Механика твёрдого тела. - 2017. - №5.- С. 122-129. doi: 10.3103/S0025654417050120. [Kayumov R.A. Supercritical behavior of compressed rods in an elastic medium // News RAS. Solids mechanics. - 2017. - No.5.- P. 122-129. doi: 10.3103/S0025654417050120.]
6. Лалин В.В., Розин Л.А., Кушова Д.А. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней//Инженерно-строительный журнал. -2013. №1. С. 87-96. [Lalin V.V., Rozin L.A., Kushova D.A. Variational formulation of the planar problem of geometrically nonlinear deformation and stability of elastic rods//Civil Engineering Journal. -2013. No.1. P. 87-96.]
7. Каюмов Р.А. Закритическое поведение сжатых стержней с нелинейно упругими опорами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2022. - № 3. - С. 23–31. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.03. [Kayumov R.A. Supercritical behavior of compressed rods with non-linearly elastic supports // Bulletin of the Perm National Research

- Polytechnic University. Mechanics. - 2022. - No. 3. - P. 23-31. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.03.]
8. Астапов Н.С., Корнев В.М. Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании. //Прикладная механика и техническая физика. 1994. Т.35, №2. С.130-142. [Astarov N.S., Kornev V.M. Supercritical behavior of an ideal rod on an elastic base. //Applied mechanics and technical physics. 1994. Vol. 35, No.2. P.130-142.]
 9. Каюмов Р. А., Тазюков Б. Ф. Устойчивость изогнутой тонкой упругой пластины, нагруженной поперечной силой // Известия ВУЗов. Авиационная техника. - 2001. - № 4. - С. 12-15. [Kayumov R. A., Tazyukov B. F. Stability of a curved thin elastic plate loaded with a transverse force // News oa universities. Aviation equipment. - 2001. - No. 4. - P. 12-15.]
 10. Паймушин В.Н. Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней // Известия РАН. ПММ. - 2007.- Т.71, Вып.5. - С. 855-893. [Paimushin V.N. Problems of geometric nonlinearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear rods // News RAS. PMM. - 2007.- Vol.71, Iss.5. - P. 855-893.]
 11. Pi Y.L., Bradford M.A. Non-linear buckling and postbuckling analysis of arches with unequal rotational end restraints under a central concentrated load // International Journal of Solids and Structures. 2012. 26(49). P. 3762-3773.
 12. Sun-ting Yan, Xiao-li Shen, Zhi-jiang Jin. On collapse of non-uniform shallow arch under uniform radial pressure//Engineering Structures, 2018.- 160, 419-438 . doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.01.027
 13. Bateni, M., Eslami, M.R. Non-linear in-plane stability analysis of FGM circular shallow arches under central concentrated force. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2014. No. 60. P. 58–69. DOI 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.01.001
 14. Тарасов В. Н. Об упругой линии сжимаемого продольной силой стержня, расположенного между двумя жесткими стенками // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.- Выпуск 1 (26). – 2018.- С.29-45. [Tarasov. N. On the elastic line of a rod compressible by longitudinal force, located between two rigid walls // Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science.- Issue 1 (26). – 2018.- P.29-45.]
 15. Zheng Y., Guo Z. Investigation of joint behavior of disk-lock and cuplok steel tubular scaffold // Journal of Constructional Steel Research. - 2021. - Vol. 177. doi: 10.1016/J.JCSR.2020.106415.
 16. Pignataro M., Rizzi N., Luongo A. Stability, bifurcation, and postcritical behaviour of elastic structures. Amsterdam: Elsevier Science, 1991. 358 p.
 17. Carvajal-Munoz J. S., Vega-Posada C. A., Saldarriaga-Molina J. C. Analysis of beamcolumn elements on non-homogeneous soil using the differential transformation method. // Revista Facultad de Ingenieria. 2022. № 103, P. 67–76. DOI: 10.17533/udea.redin.20210218.
 18. Тарасов В. Н. Об упругой линии сжимаемого продольной силой стержня, расположенного между двумя жесткими стенками // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.- Выпуск 1 (26). – 2018.- С.29-45. [Tarasov. N. On the elastic line of a rod compressible by longitudinal force, located between two rigid walls // Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science.- Issue 1 (26). – 2018.- P.29-45.]
 19. Гарипов А. И. Численное исследование закритической работы стержней кольцевого поперечного сечения при внецентренном сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 5(82). С. 87-93. DOI: 10.23968/1999-5571-2020-17-5-87-93. [Garipov A.I. Numerical study of supercritical work of rods of annular cross-section under eccentric compression // Bulletin of Civil Engineers. 2020. No. 5(82). P. 87-93. DOI: 10.23968/1999-5571-2020-17-5-87-93.]
 20. Peng J. L., Ho C. M., Chan S. L., Chen W. F. Stability study on structural systems assembled by system scaffolds // Journal of Constructional Steel Research. 2017. Vol. 137, P. 135-151. DOI: 10.1016/J.JCSR.2017.06.004.

21. Mercier C., Khelil A., Al Mahmoud F., Blin-Lacroix J. L., Pamies A. Experimental investigations of buckling behaviour of steel scaffolds // Structures. 2021. Vol. 33. P. 433-450. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2021.04.045.
22. Areiza-Hurtado M., Aristizábal-Ochoa J. D. Second-order analysis of a beam-column on elastic foundation partially restrained axially with initial deflections and semirigid connections // Structures. 2019. Vol. 20. P. 134-146. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2019.03.010.
23. Каюмов Р. А., Тазюков Б. Ф., Мухамедова И. З., Шакирзянов Ф. Р. Большие прогибы вязкоупругих панелей // Известия вузов. Математика. 2019, №11, С. 80-86. [Kayumov R. A., Tazyukov B. F., Mukhamedova I. Z., Shakirzyanov F. R. Large deflections of viscoelastic panels // News of universities. Mathematics. 2019, No. 11, P. 80-86.]
24. Kayumov R. A., Shakirzyanov F. R. Large Deflections and Stability of Low-Angle Arches and Panels During Creep Flow // Adv. Struct. Mater. 2021. T. 141. C.237-248. DOI: 10.1007/978-3-030-54928-2_18.

Информация об авторах

Каюмов Рашит Абдулхакович, доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

E-mail: kayumov@rambler.ru, ORCID: 0000-0003-0711-9429

Хайруллин Ленар Равилевич, кандидат технических наук, доцент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

E-mail: lenarhay@mail.ru, ORCID: 0000-0002-2870-4195

Гилязитдинов Рамиль Фелюсович, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

E-mail: gi1lll@ya.ru, ORCID: 0009-0006-2631-3285

Information about the authors

Rashit A. Kayumov, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation

E-mail: kayumov@rambler.ru, ORCID: 0000-0003-0711-9429

Lenar R. Khayrullin, candidate of technical sciences, associate professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation

E-mail: lenarhay@mail.ru, ORCID: 0000-0002-2870-4195

Ramil F. Gilyazitdinov, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation

E-mail: gi1lll@ya.ru, ORCID: 0009-0006-2631-3285